Équivalence des normes, théorème de Riesz

Ici on ne travaille que dans les $\mathbb{R}$ espace vectoriels.

Théorème 1 : Si E est un espace vectoriel de dimension fini, toutes ses normes sont équivalentes.

Théorème 2 : Un espace vectoriel normé E est de dimension finie si et seulement la boule unité $\overline{B(0,1)}$ est compact.

Preuve du théorème 1 : On se donne E un espace vectoriel et dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et N une norme sur E. On va montrer que N est équivalente à la norme N_0 qui à un vecteur $x = \sum_{k=0}^{n} x_i e_i$ associe $\sup_i |x_i|$. Par transitivité de la relation d'équivalence, cela suffira pour montrer le théorème.

Soit $x = \sum_{k=0}^{n} x_i e_i \in E$. Par inégalité triangulaire et homogénéité il vient $N(x) \leq \sum_{k=0}^{n} |x_i| N(e_i) \leq N_0(x) m$ où $m = \sum_{k=0}^{n} N(e_i)$.

Réciproquement, on pose $\varphi : x \in (E, N_0) \mapsto N(x) \in \mathbb{R}$. Si $x, y \in E$, $|f(x) - f(y)| \leq N(x-y) \leq N_0(x-y)m$ donc φ est continue car lipschtzienne. Comme $S_1 = \{x \in E : N_0(x) = 1\}$ est compact (car fermé borné, attention on anticipe un peu sur le théorème 2), il existe $x_0 \in S_1$ qui minimise φ sur S_1. Ainsi, pour tout $x \in E$, $N(x) = N\left(\frac{x N_0(x)}{N_0(x)}\right) \geq N_0(x) N(x_0)$.
On a donc, pour tout $x \in E$, $N(x_0) N_0(x) \leq N(x) \leq N_0(x) m$ donc N et N_0 sont équivalentes. $\square$

Preuve du théorème 2 :

Preuve du sens direct : Soit E un evn de dimension finie. Les fermés bornés sont compacts. En effet, soit F un fermé borné de E et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans F. Comme F est borné, les suites $(e_i^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées. On peut donc faire une extraction diagonale grâce à Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ (on suppose quand même admis ce résultat) qui donne la convergence d'une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme F est fermé, cette limite est bien dans F. Finalement, $\overline{B(0,1)}$ est clairement fermé borné, donc c'est bon.

Preuve du sens réciproque : Soit $(E, ||.||)$ un evn de dimension infinie et supposons par l'absurde que $\overline{B(0,1)}$ est compact. On peut alors se donner un recouvrement fini d'ouverts de la forme

$$\overline{B(0,1)} = \bigcup_{i=1}^{l} B(x_i, 1)$$

où les x_i sont dans $\overline{B(0,1)}$. Notons $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$. Comme E est de dimension infinie on peut se donner $x \in E \setminus F$. Comme F est un sous-espace vectoriel de dimension finie on peut se donner $y \in F$ son projeté sur F, c'est à dire l'unique élément de F qui est tel que $||x - y|| = \text{d}(x, F) > 0$. On pose alors $x_0 = \dfrac{x-y}{||x-y||}$. Comme $0 \in F$ on a $\text{d}(x_0, F) \leq ||x_0 - 0|| = 1$.
De plus, si $z \in F$, $||x_0 - z|| = \left|\left|\dfrac{x - y - ||x-y||z}{||x-y||}\right|\right| \geq \dfrac{\text{d}(x,F)}{||x-y||} = 1$ car $y - ||x-y||z \in F$. Ainsi, $\text{d}(x_0, F) = 1$. Mais $x_0 \in \overline{B(0,1)}$ donc il existe $1 \leq i \leq l$ tel que $x_0 \in B(x_i, 1)$ et alors $||x_0 - x_i|| < 1$ donc $\text{d}(x_0, F) < 1$, absurde. $\square$

Remarques importantes :

- Attention, dans la preuve du théorème 1 on utilise le fait que les fermés bornés sont compacts en dimension fini alors qu'on le montre après. Ce n'est pas dérangeant car ce résultat ne dépend pas du résultat du théorème 1, vous pouvez d'ailleurs le présenter avant si vous voulez, mais il faut en être conscient.

- C'est bien d'avoir en tête la preuve du fait que si F est un sous ev de dimension fini il existe un unique projeté qui minimise la distance à F.